ANÁLISIS

1. Halla la derivada de la función f(x)=$\frac{2}{x+1}$ en el punto x=3, aplicando la definición de derivada. **Solc:** $\boldsymbol{\frac{-1}{8}}$

2. Comprueba que la siguiente función es continua y derivable y halla f´(0),f´(3) y f´(1). F(x)=$\begin{cases} 3x-1 \; si \; x<1 \\ x^2+x \; si \; x \geq 1 \end{cases}$. ¿Cuál es su función derivada?¿En qué punto se cumple que f´(x)=5? **Solc: f continua y derivable. x=2 f´(x)=**$\boldsymbol{\begin{cases} 3 \; si \; x<1 \\ 2x+1 \; si \; x \geq 1 \end{cases}}$

3. Comprueba que f(x) es continua pero no derivable en x=2
   f(X)=$\begin{cases} \ln(x-1) \; si \; x<2 \\ 3x-6 \; si \; x \geq 2 \end{cases}$

4. Dada la función

   f(x)={$e^{-x} si \; x \leq 0$
   1-x si $x>0$ estudia si es continua y derivable en todo R.
   Solc: Continua y derivable en R

5. a)Calcula la ecuación de la recta tangente y normal a la gráfica de la función f(x)=$\frac{x}{x^2-1}$ en el punto de abscisa x=2 .b) Lo mismo para y=$2^{x^2-x}+\ln(x+1)-5 \; en \; x=0$ **.Solc: a)** $\boldsymbol{y-\frac{2}{3}=\frac{-5}{9}(x-2)}$**;** **y-**$\boldsymbol{\frac{2}{3}=\frac{9}{5}(x-2)}$ **b) y+5=(1-ln2)x ; y+5=**$\boldsymbol{\frac{1}{ln2-1}x}$

6. Halla las tangentes a la curva y=$\frac{2x}{x-1}$ paralelas a la recta 2x+y=0.
   Solc: y=-2x; y-4=-2(x-2)

7. Dada la función f:(0,∞) $\rightarrow R$,definida por f(x)=lnx, donde ln es la función logaritmo neperiano, se pide: Comprueba que la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x=e es y=-ex+1+e^2

8. Sea f:R→ R la función definida por f(x)=$x^2|x-3|$.Estudia la continuidad y derivabilidad de f.**Solc: Continua pero no derivable en x=3**
9. Considera la función f:R→ R definida por f(x)=$e^{\frac{2x}{x^2+1}}$ .Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos(puntos donde se obtienen y valor que alcanzan).
   Solc: Creciente (-1,1); Decreciente $(\infty,-\mathbf{1})\cup(\mathbf{1},+\infty)$
   m($(-\mathbf{1},\boldsymbol{e^{-1}})$**; M(1,e)**

10. La recta tangente a la gráfica de la función f:R→ R, definida por f(x)=mx^2+nx-3 en el punto(1,-6) es paralela a la recta de ecuación y=-x. Determina las constantes m y n .Halla la ecuación de la recta tangente .**Solc :m=2;n=-5;y+6=-(x-1)**

11. Sea f:R→ R la función definida por f(x)=ln(x^2+1) siendo ln la función logaritmo neperiano. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función f (puntos donde se alcanza y valor de la función)
    Solc: Decreciente ($-\infty,\mathbf{0})$; $\boldsymbol{Creciente}(\mathbf{0},+\infty)$; $\boldsymbol{m}(\mathbf{0},\mathbf{0})$

12. De una función f:$[0,5]\rightarrow R$ se sabe que f(3)=6 y que la función derivada está dada por:
    f´(x)=$\begin{cases} 5x-2\ si\ 0<x<1 \\ x^2-6x+8\ si\ 1\leq x<5 \end{cases}$
    a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x=3
    b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos o locales (puntos donde se obtienen) .

    Solc:y-6=-(x-3);Creciente($\boldsymbol{\frac{2}{5}},\mathbf{2})\cup(\mathbf{4},\mathbf{5})$; $\boldsymbol{decreciente}\left(\mathbf{0},\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\right)\cup$
    $(\mathbf{2},\mathbf{4})$; $\boldsymbol{mínimo\ en\ x=\frac{2}{5}\ y\ x=4;\ máximo\ en\ x=2}$

13. De entre todos los rectángulos que tienen uno de sus vértices en el origen de coordenadas, el opuesto de este vértice en la curva y=$\frac{2x^2}{x^2-1}$ (x>1), uno de sus lados situado sobre el semieje positivo de abscisas y otro lado sobre el semieje positivo de ordenadas. Halla el que tiene área mínima. **Solc: x=$\sqrt{3}$; $y=3$**

14. Una ventana normanda consiste en un rectángulo coronado con un semicírculo. De entre todas las ventanas normandas de perímetro 10m, halla las dimensiones del marco de área máxima.
Solc: x= $\frac{20}{\pi+4}$ y=$\frac{40}{\pi+4}$

15. Un alambre de 100m de longitud se divide en dos trozos. Con uno de los trozos se construye un cuadrado y con el otro un rectángulo cuya base es doble que su altura. Calcula las longitudes de cada uno de los trozos con la condición de que la suma de las áreas de estas dos figuras sea mínima. **Solc:$x=\frac{200}{17}$; $y=\frac{150}{17}$**

16. Sea f:R→ R la función definida por f(x)=$x+e^{-x}$.Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f. **Solc :f convexa en R.**

17. Sea f:(0,+∞) $\rightarrow R$ la función definida por f(x)=$\frac{3x-1}{\sqrt{x}}$
    a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f(puntos donde se obtienen y valores que alcanzan)
    b) Calcula los puntos de inflexión de la gráfica f.
    Solc: Creciente y cóncava en todo su dominio

18. Calcula
$\lim_{x\to 1}(\frac{1}{lnx}-\frac{1}{x-1})$ siendo ln la función logaritmo neperiano. **Solc:$\frac{1}{2}$**

19. Se sabe que: $\lim_{x\to 0}\frac{x-\alpha senx}{x^2}$ es finito. Determina el valor de α y Calcula el límite. **Solc:** $\boldsymbol{\alpha = 1\ y\ \lim_{x\to 0} f = 0}$

20. Determina el valor de las constantes c y d sabiendo que la gráfica de la función f:R→ R definida por f(x)=x^3+3x^2+cx+d tiene como recta tangente en su punto de inflexión a la recta y=3x+1.
Solc: c=6; d=2.

21. Sea f: $\left[\frac{1}{e},4\right] \to R$ la función definida por:
f(x) $\begin{cases} x-lnx+a\ si\ \frac{1}{e}\le x\le 2 \\ bx+1-ln2\ si\ 2<x\le 4\end{cases}$
a) Calcula a y b para que f sea derivable en $(\frac{1}{e},4)$
b) Para a=0 y b=$\frac{1}{2}$ halla los extremos de la función.
Solc: Para que sea derivable a=0 y b=$\frac{1}{2}$.Mínimo relativo en x=1

22. En una empresa los ingresos (en euros) dependen de la edad. Si la edad es x y está comprendida entre los 18 y los 50 años, los ingresos vienen dados por $-x^2+70x$; mientras que para edades superiores a 50 años los ingresos vienen dado por $\frac{400x}{x-30}$.¿Cuál es el máximo de los ingresos y a qué edad se alcanza? **Solc: Ingresos 1225€ y se alcanza a los 35 años.**

23. Sea f la función definida por f(x)=$\frac{9x-3}{x^2-2x}$ $para\ x\neq 0\ y\ x\neq 2$.
a) Calcula las asíntotas de la gráfica de f.
b) Estudia la posición de la gráfica de f respecto de sus asíntotas.
c) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
d) Con los datos obtenidos, esboza la gráfica de f.
Solc: A.V . x=0 y x=2;A.H y=0; Función decreciente en todo su dominio. Puntos de corte $(\frac{1}{3},0)$

24. Sea f:R→ R la función definida por f(x)=$|x^2-1|$.
    a) Esboza la gráfica de f
    b) Estudia la derivabilidad de f
    Solc: f derivable excepto en x=1, x=-1

25. Dibuja el recinto limitado por la curva y=$\frac{1}{2}+cosx$, los ejes de coordenadas y la recta x=π

26. Considera las funciones f,g :R→ R definidas por f(x)=6x-x^2 y g(x)=x^2-2x. Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados y calcula sus puntos de corte. **Solc: Puntos de corte; (0,0)(4,8)**

27. Sea f:$(-1,+\infty)\rightarrow R$ la función definida por f(x)=ln(x+1) donde ln denota la función logaritmo neperiano. Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, el eje OY y la recta y=1. Calcula los puntos de corte de las gráficas. **Solc: Puntos de corte; (0,0)(e-1,1)**

28. Sea f la función definida por f(x)=$\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}\ para\ x\neq -1\ y\ x\neq 2$
    a) Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de f.
    b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
    c) Calcula si existe algún punto de la gráfica de f donde ésta corta a la asíntota horizontal.
    d) Realiza un esbozo de la gráfica.
    Solc: A.V x=-1;x=2 A.H y=2
    Creciente $(-\mathbf{4},-\mathbf{1})\cup(-\mathbf{1},\mathbf{0})$; $\boldsymbol{Decreciente}(-\infty,-\mathbf{4})\cup(\mathbf{0},\mathbf{2})\cup(\mathbf{2},+\infty)$
    m$\left(-\mathbf{4},\frac{\mathbf{16}}{\mathbf{9}}\right)\boldsymbol{M}(\mathbf{0},\mathbf{0})$**.La curva corta a la asíntota horizontal en x=-1 pero este punto no pertenece al dominio de la función.**

29. Sea f la función definida para x= 1 por f(x)=$\frac{e^x}{x-1}$
    a) Halla las asíntotas de la gráfica de f
    b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f
    c) Determina los intervalos de concavidad y convexidad

d) Esboza la gráfica de f
Solc: A.V x=1; A.H y=0;
Creciente $(\mathbf{2},+\infty)$; $\boldsymbol{Decreciente}\infty(-\infty,\mathbf{2})-\{\mathbf{1}$
Cóncava $(-\infty,\mathbf{1})$; $\boldsymbol{Convexa}\ (\mathbf{1},+\infty)$

30. Sea f:R→ R la función continua definida por
f(x)=$\begin{cases} |2-x| si\ x<a \\ x^2-5x+7\ si\ x\geq a \end{cases}$ donde a es un número real.
a) Determina a
b) Halla la función derivada de f
Solc: a=3 f´(x)=$\begin{cases} \boldsymbol{-1\ si\ x<2} \\ \boldsymbol{1\ si\ 2<x<3} \\ \boldsymbol{2x-5\ si\ x\geq 3} \end{cases}$

31. Calcula $\int \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x}}dx$. Sugerencia: se puede hacer el cambio de variable t=$\sqrt{e^x}$.**Solc**$\boldsymbol{2\sqrt{e^x}-2ln\left|1+\sqrt{e^x}+C\right|}$

32. Calcula $\int arcsenx.dx$ **Solc:**$\boldsymbol{x.arcsenx+\sqrt{(1-x^2)}+C}$

33. Calcula $\int \frac{x^2}{x^2-6x+5}dx$ **Solc: x**$\boldsymbol{-\frac{1}{4}ln|x-1|+\frac{25}{4}ln|x-5|+C}$

34. Calcula $\int x.e^x dx$ **Solc:**$\boldsymbol{x.e^x-e^x+C}$

35. Calcula$\int \frac{x^4}{(1-x)^3}dx$ **Solc:**$\boldsymbol{\frac{-1}{2}x^2-3x-6ln|1-x|-\frac{4}{1-x}+\frac{1}{2}.(1-x)^{-2}+C}$

36. Calcula $\int xsen(2x)dx$ **Solc:**$\boldsymbol{\frac{-xcosx}{2}+\frac{sen2x}{4}}$**+C**

37. Halla $\int \frac{x+1}{1+\sqrt{x}}dx$ **Solc:** $\boldsymbol{\frac{2\sqrt{x}^3}{3}-x+4\sqrt{x}-4ln\left|1+\sqrt{x}+C\right|}$

38. Calcula $\int \frac{x^2}{2x^2-2x-4}dx$ **Sol:**$\boldsymbol{\frac{X}{2}+\frac{2}{3}ln|x-2|-\frac{1}{6}ln|x+1|+C}$

39. Calcula $\int \frac{x}{(cosx)^2}dx$ Sugerencia: integración por parte.

Solc: x tagx +ln$|\boldsymbol{cosx}|+\boldsymbol{C}$

40. Sea g:$R\rightarrow R$ *la función definida por* $f(x)=\ln(x^2+1)$.Calcula la primitiva de g cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.
Solc:$\boldsymbol{xln(x^2+1)-2x+2arctgx}$

41. Sea g:$(0,+\infty)\rightarrow R$ *la función definida por* $g(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x}.}$. *Determina la primitiva de g cuya gráfica pasa por el punto* $P(1,0)$.

Sugerencia; se puede hacer el cambio t=$\sqrt{x}$

42. a) Determina la función f:$R\rightarrow R$ *tal que* f´(x)=(2x+1)e^{-x} y su gráfica pasa por el origen de coordenadas.

b) Calcula la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x=0 **Solc: a)f(x)=**$-(\boldsymbol{2x+1})\boldsymbol{e^{-x}-2e^{-x}+3}$ **b)y=x**

43. Determina una función derivable f:$R\rightarrow R$ sabiendo que f(1)=1 y que f´(x)=$\begin{cases}x^2-2x\ si\ x<0\\ e^x-1\ si\ x\geq 0\end{cases}$

Solc:$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}-x^2+3-e\ si\ x<0\\ e^x-x+2-e\ si\ x\geq 0\end{cases}}$

44. Considera el recinto limitado por y=x^2; y=$2-x^2$; y=4
    a) Haz un esbozo del recinto y calcula los puntos de corte de las curvas.
    b) Calcula el área de recinto **Solc: A=**$\boldsymbol{8u^2}$

45. Sea $f:R\rightarrow R; g:R\rightarrow R$ las funciones definidas respectivamente por $f(x)=\frac{|x|}{2}$ y g(x)= $\frac{1}{1+x^2}$
    a) Esbozas las gráficas de f y g sobre los mismos ejes coordenados y calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.
    b) Calcular el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.
    Solc : A=$\boldsymbol{\frac{\pi-1}{2}u^2}$

46. Sean f:$R\rightarrow R\ \ y\ g:R\rightarrow R$ las funciones definidas mediante:

$$f(x) = |x(x-2)|\ y\ g(x) = x+4$$

a) Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes. Calcular los puntos de corte entre ambas gráficas.
b) Calcular el área del recinto limitado por las gráficas f y g

Solc: A =$\frac{109}{6}u^2$

47. De la función f:R→ $R\ definida\ por\ f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo relativo en x=1, un punto de inflexión en (0,0) y que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{5}{4}$. Calcula a, b, c y d. **Solc; a=-1 b=0 c=3 d=0**

48. Sea f una función continua en el intervalo $[2,3]$ y F una primitiva de f tal que F(2)=1 y F(3)=2. Calcula:

a) $\int_2^3 f(x)dx$ **Solc ; a) 1 b) -2 c)$\frac{7}{3}$**

b)$\int_2^3 (5f(x) - 7)dx$

c)$\int_2^3 \left(F(x)\right)^2 f(x)dx$

49. Sea la función definida por $f(x) = \frac{2}{x^2-1} para\ x \neq -1\ y\ x \neq 1$

a) Halla una primitiva de f

b) Calcula el valor de K para que el área del recinto limitado por el eje de abscisas y la gráfica de f en el intervalo $[2, K]$ sea ln2.

Solc : a)$ln|x-1| - ln|x+1| + C$ b) K=5

50.Sea g:R→ $R\ la\ función\ definida\ por\ g(x) = -x^2 + 6x - 5$

a) Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de g en el punto de abscisa x=4.

b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de g, la recta x-2y+2=0. Calcula el área de este recinto.

Solc: a) x-2y+2=0 A=$\frac{125}{48}u^2$