MATRIZ INVERSA

Definición

Llamamos matriz inversa de una matriz cuadrada A de orden n a otra matriz de orden n que representamos porA^{-1} tal que: A.A^{-1}=$A^{-1}.A = I$, siendo I la matriz unidad.

Para calcular la matriz inversa utilizaremos cualquiera de los siguientes métodos:

Método directo

Es aconsejable siempre que la matriz sea de orden 2, en caso contrario se complica el método

Sea A=$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .Designemos a la matriz $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

Aplicando la expresión: A.A^{-1}=$A^{-1}.A = I$

A.$A^{-1} = I$

$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2x-3z & 2y-3t \\ x+z & y+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Comparando ambas matrices e igualando obtenemos:

2x-3z=1 $\rightarrow 2x + 3x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{5}$

x+z=0$\rightarrow z = -x \rightarrow z = -\frac{1}{5}$

2y-3t=0$\rightarrow t = \frac{2}{3}y \rightarrow t = \frac{2}{3}\frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

y+t=1 $\rightarrow y + \frac{2}{3}y = 1 \rightarrow \frac{5}{3}y$ =1$\rightarrow y = \frac{3}{5}$

Por lo tanto la matriz inversa de A es:

A^{-1}=$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

$$Comprobación$$

$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Método de GAUSS-JORDAN</u>

Para hallar por este método la matriz inversa, colocamos a la derecha de A la matriz identidad del mismo orden$(A|I)$, y al conjunto obtenido le aplicaremos transformaciones elementales por filas hasta obtener $(I|A^{-1})$.S i al realizar el proceso de transformación alguna de las filas de A se anula, entonces A no tiene inversa.

Sea la matriz A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{-1}{4}F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2+\frac{3}{4}F_3]{F_1+F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1-2F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{4} & -1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Por lo tanto la matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{4} & -1 & \frac{3}{4} \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación

A.$A^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{4} & -1 & \frac{3}{4} \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Matriz inversa mediante determinantes</u>.

Definiciones

Dada una matriz cuadrada A de orden n, se llama ***submatriz complementaria del elemento a_{ij}***

A la matriz de orden n-1 que resulta al suprimir en A la fila i y la columna j.Esta matriz se expresa como α_{ij}.

Se llama ***menor complementario*** del elemento a_{ij} al determinante de la submatriz complementaria del elemento a_{ij}, es decir, $|\alpha_{ij}|$.

Dada una matriz A de orden n, se llama ***adjunto del elemento*** a_{ij} al número A_{ij} definido por la siguiente expresión:

$$A_{ij=}(-1)^{i+j}|\alpha_{ij}|$$

Si sustituimos cada elemento de A por su adjunto, se obtiene otra matriz que recibe el nombre de matriz adjunta de A, y que se expresa como Adj(A).

Si A es una matriz cuadrada con $|A| \neq 0$(regular), su matriz inversa es la matriz definida por cualquiera de las siguientes expresiones:

A^{-1}=$\frac{1}{|A|}.[Adj(A)]^{t}$=$\frac{1}{|A|}.Adj(A^t)$

Hallemos la matriz inversa de A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante de A:

$$|A| = 4 - 10 = -6$$

Hallemos la matriz adjunta de A:

Adjunto de $a_{11} = A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 4 - 10 = -6$

Adjunto de $a_{12} = A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -(-12 - 2) = 14$

Adjunto de $a_{13} = A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 15 - (-1) = 16$

Adjunto de $a_{21} = A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 0$

Adjunto de $a_{22} = A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -4$

Adjunto de $a_{23} = A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -5$

Adjunto de $a_{31} = A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

Adjunto de $a_{32} = A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -(-4) = 4$

Adjunto de $a_{33} = A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5$

Adj(A)=$\begin{pmatrix} -6 & 14 & 16 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 14 & -4 & 4 \\ 16 & -5 & 5 \end{pmatrix}$

La inversa de A viene dada por la expresión: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} . (Adj(A))^t$

$$A^{-1} = -\frac{1}{6} . \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 14 & -4 & 4 \\ 16 & -5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-14}{6} & \frac{4}{6} & \frac{-4}{6} \\ \frac{-16}{6} & \frac{5}{6} & \frac{-5}{6} \end{pmatrix}$$